

Title	円盤形放射状液体シート上の波動の解析(非線形波動の数 理と応用)
Author(s)	佐野, 雅之; 船越, 満明
Citation	数理解析研究所講究録 (2006), 1483: 188-195
Issue Date	2006-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/58088">http://hdl.handle.net/2433/58088</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 円盤形放射状液体シート上の波動の解析

京大・情報学

佐野 雅之 (Masayuki Sano)

京大・情報学

船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems

Graduate School of Informatics, Kyoto University

### 1 序

液体シートの流れは2次元平面状、円環形シート、円盤状に流れる放射状シートがある。これらは工学的に重要なだけでなく理論的にも興味深い対象として研究が行われてきた。その中でも液体が円盤状に広がる放射状液体シートは、2つの液体ジェットが衝突したときなどに生じ古くから注目されてきた。円盤状液体シートの特徴としては、液体の動径方向速度が円盤中心からの距離によらず一定であること、したがって厚さが円盤中心からの距離に反比例すること、またシートの広がる半径に限界があることなどが知られている [1, 2]。

シートに生じる波に関しては2次元平面シートや円環形シートの場合と同様に反対称モードと対称モードが存在し外部流体の効果があるときには長波長の擾乱に対して不安定となるが、外部流体の効果がないときには中立安定となることが線形解析によって調べられている [3]。

近年、2次元平面シートもしくは円環形シートに対して薄膜近似と呼ばれる手法を用いての研究が多くされている。これは、液体シートの厚さ方向のスケールが流れ方向に生じる波の波長のスケールよりも小さいことに着目し、厚さ方向の自由度を積分することによって液体シートのモデル方程式を導く手法である。これによって種々の液体シートの挙動の非線形効果が調べられてきている [4, 5, 6, 7]。

ここでは薄膜近似を軸対称な円盤形放射状シートに適用してモデル方程式を導出し、それを用いて円盤形放射状シート上の波動の伝播の様子を調べる。得られたモデル方程式の定常解を数値的に求め、その上の一点に時間周期的な擾乱を加えた場合の波動の時間発展を調べる。擾乱の加え方によって反対称モード又は対称モードが生じるが、その伝播の様子を数値的に計算し2次元平面シートの場合の場合との違いを調べる。

### 2 薄膜近似による定式化

円盤状に広がる軸対称な液体シートを考える。流体は非粘性非圧縮とする。またここでは外部流体の効果を無視する。流体の密度を  $\rho$  とし、表面張力係数を  $\sigma$  とおく。円柱座標系をとり図1のように  $r, z$  方向の速度を  $u, v$  とし、シート内の圧力を  $p$  シートの上下の表面を  $z = z_{\pm}$  で表す。基礎方程式は連続の式と Euler 方程式である。これをシートの厚さ方向に  $z = z_-$  から  $z = z_+$  まで積分して平均化する。

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) dz + \int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0, \quad (1)$$

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{z_-}^{z_+} u \frac{\partial u}{\partial r} dz + \int_{z_-}^{z_+} v \frac{\partial u}{\partial z} dz = - \int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} dz, \quad (2)$$

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \int_{z_-}^{z_+} u \frac{\partial v}{\partial r} dz + \int_{z_-}^{z_+} v \frac{\partial v}{\partial z} dz = - \int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (3)$$

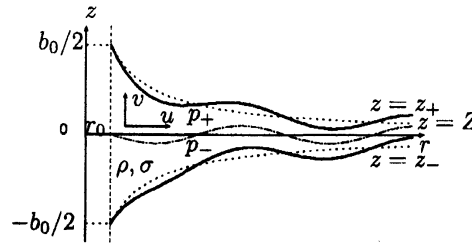


図 1: 円盤形放射状液体シートの概念図

境界条件は上下界面での運動学的境界条件

$$v = \frac{\partial z_{\pm}}{\partial t} + u \frac{\partial z_{\pm}}{\partial r} \quad \text{at } z = z_{\pm} \quad (4)$$

と力学的境界条件

$$p_{\pm} = \mp \sigma \left( \frac{\frac{\partial^2 z_{\pm}}{\partial r^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial z_{\pm}}{\partial z}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\partial z_{\pm}}{\partial r}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_{\pm}}{\partial r}\right)^2}} \right) \quad \text{at } z = z_{\pm} \quad (5)$$

である。

ここで  $z$  方向のシートの厚さ方向の変化のスケールが  $r$  方向に生じる波の波長よりもずっと小さいとして薄膜近似の考え方を適用する [4, 5, 6, 7]。ここでは  $u, v, p$  の  $z$  依存性について  $u, \partial v / \partial z, \partial p / \partial z$  が  $z$  についてほとんど変化しないと仮定し定数とおく。このように  $u, v, p$  の  $z$  依存性を近似することで (1), (2), (3) の積分を実行することができる。

以下では各変数を代表的長さを噴出口の半径  $r_0$  と噴出口でのシート流の速度  $U_0$  を用いて無次元化する。また Weber 数  $We$  を  $We = \rho U_0^2 b_0 / \sigma$  で定義する。

積分を実行し、さらに Leibnitz 則を用いると (6) と (7) は  $\bar{u}$  と  $\bar{v}$  に対する時間発展方程式として

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{We} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\Delta p}{b} \frac{\partial Z}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{1}{We} \frac{\Delta p}{b}, \quad (7)$$

が得られる。ここで  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$  は  $b = z_+ - z_-$  をシートの厚さとして

$$\bar{u} = \frac{1}{b} \int_{z_-}^{z_+} u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{b} \int_{z_-}^{z_+} v dz, \quad \bar{p} = \frac{1}{b} \int_{z_-}^{z_+} p dz \quad (8)$$

で表される厚さ方向の平均量である。また  $\Delta p = p_+ - p_-$  はシート内部の  $z$  方向のシートの上下界面の圧力  $p_{\pm}$  の差で (5) より計算される。(4) について  $z = z_{\pm}$  に対応する 2 つの式の和を取ると  $Z$  の時間発展方程式として

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \bar{v} - \bar{u} \frac{\partial Z}{\partial r}, \quad (9)$$

となり、差を取って (1) を用いて変形すると  $b$  の時間発展方程式として

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{u} b)}{\partial r}, \quad (10)$$

を得る。この (6), (7), (9), (10) が軸対称放射状シートの時間発展を記述する方程式となる。

### 3 定常解

この軸対称放射状シートの定常流を考えるために、モデル方程式の定常解を考える。(6),(7),(9),(10)で時間微分項を0として

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}b) = 0, \quad (11)$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{We}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r} - \frac{\Delta p}{b}\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = 0, \quad (12)$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial r} + \frac{1}{We}\frac{\Delta p}{b} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{v} - \bar{u}\frac{\partial Z}{\partial r} = 0. \quad (14)$$

ここで解として  $r$  軸に関して対称なものを考えることにすると

$$Z = 0 \quad (15)$$

なので(14)に代入して

$$\bar{v} = 0 \quad (16)$$

となる。ここで  $z_{\pm} = \pm b/2$  より  $\Delta p = 0$  であるので、(15),(16)は(13)をみたす。さらに(11)より  $Q$  を定数として

$$u = \frac{Q}{rb} \quad (17)$$

となる。この  $Q$  はシート内の流体の流量に対応する量である。これらを(12)に代入し(5)も用いると定常解の  $b$  の満たす方程式は

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{Q^2}{r^2b^2}\right) + \frac{1}{2We}\left(\frac{\frac{\partial^2 b}{\partial r^2}}{\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\partial b}{\partial r}}{r\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)^2}}\right) = 0 \quad (18)$$

となる。

$We$  が大きく表面張力項を無視するような場合  $We \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ) となるが、このとき(18)の第2項が無視されるために近似解は  $b = Q/r$ ,  $u = 1$  の形となり、これは実験的に報告されている結果[2]と一致する。

有限の  $r$  での(18)の解は境界条件を与えて数値的に求める。数値計算法としては4次のRunge-Kutta法を用い  $r$  軸の1点で  $b$  及び  $\partial b/\partial r$  の値を与えて刻み幅  $\Delta r = 0.001$  として積分した。図2は定常解を数値的に求めたものについて厚さ  $b$  を表示したものである。図2(a)では  $We = 2, Q = 1$  として  $1 \leq r \leq 10$  の範囲で計算している。 $r_0 = 1.0$  での境界条件として  $b = 0.917479$  を固定し  $\partial b/\partial r$  の値を変えた場合を示している。計算結果より定常解は一般に振動しながら減少する解になることがわかる。しかし  $\partial b/\partial r = -0.7805$  としたときに振動せずに減衰する解になっている。これは実際には  $r$  の大きな値で  $\partial b/\partial r$  の値として近似解  $b = Q/r$  の値を用いて逆方向に積分して得られたものである。この図2(a)に対し図2(b)では  $We$  を増加させて  $We = 20$  に変えた場合を示している。この場合は振動の波長が短くなる傾向が見られる。またさらに  $Q$  を増加させて  $Q = 20$  とした場合が図2(c)である。 $Q$  を大きくすることは近似解  $b = Q/r$  では  $r$  のスケールを大きくすることになるが、図2(c)ではそれに対応する事として振動部分の振幅の厚さに対する比が減少する傾向が見られる。以下のシートの時間発展の計算は  $We = 500, Q = 25.0$  として  $50 \leq r \leq 450$  の範囲での数値計算を行った。この  $We$  と  $Q$  の値の時に  $r = 450$  で  $b$  と  $\partial b/\partial r$  の値を  $b = Q/r$  に基づ

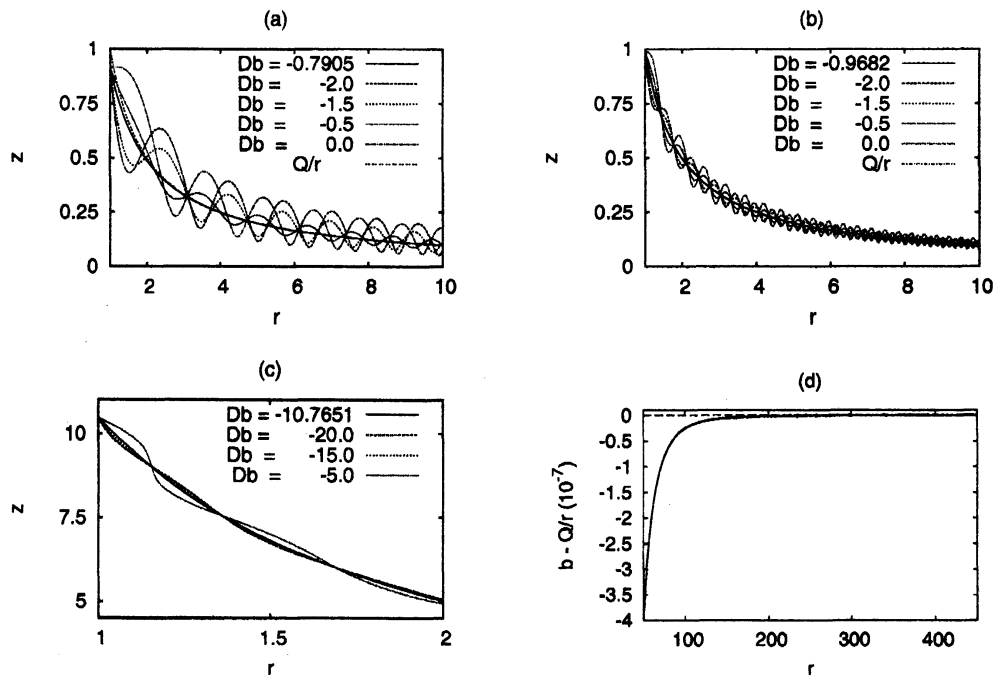


図 2: 定常解の数値解のシート厚さ  $b$  ((a),(b),(c)) 又は数値解  $b$  と近似解  $b = Q/r$  のずれ ((d)) パラメータは (a):  $We = 2.0$ ,  $Q = 1.0$ ,  $b_0 = 0.917479$ , (b):  $We = 20.0$ ,  $Q = 1.0$ ,  $b_0 = 0.98633$ , (c):  $We = 20.0$ ,  $Q = 10.0$ ,  $b_0 = 10.4782$ , (d):  $We = 500$ ,  $Q = 25.0$

いて与えて求めた数値解と近似解  $b = Q/r$  の差を図 2(d) に示した。このときの数値解は  $b = Q/r$ ,  $u = 1$  に近い形をしていて、その違いは小さい ( $10^{-6}$  以下) ことがわかる。

以下では図 2(c) で示した振動部分のない数値解で表される定常流についてのシート上の波動の時間発展を調べることにした。その理由は  $We$  が大きい時には振動の周期が短くなると薄膜近似の仮定から外れていくことになること、実際のシートでは  $b$  について  $r$  に反比例することが知られているためである。しかし振動する定常解を考えた時にどのような違いが出るかは今後の考察の課題である。

#### 4 円盤形放射状シートの時間発展の数値計算

薄膜近似によって得られたモデル方程式 (6),(7),(9),(10) を用いて円盤形放射状シート上の波の伝播の様子を調べる。数値計算法としては空間方向は 2 次の中心差分で離散化し、時間方向は 4 次の Runge-Kutta 法を用いて積分した。空間方向の刻み幅  $\Delta x$  は 0.005, 時間方向のステップ幅  $\Delta t$  は 0.001 としている。擾乱はシートの境界での時間周期的な強制振動で、擾乱は対称モードの計算では  $u$  に与える形で

$$b = b_0, \quad u = U_0 + A(1 - e^{-t/T_0}) \sin(2\pi/T), \quad v = z = 0, \quad (19)$$

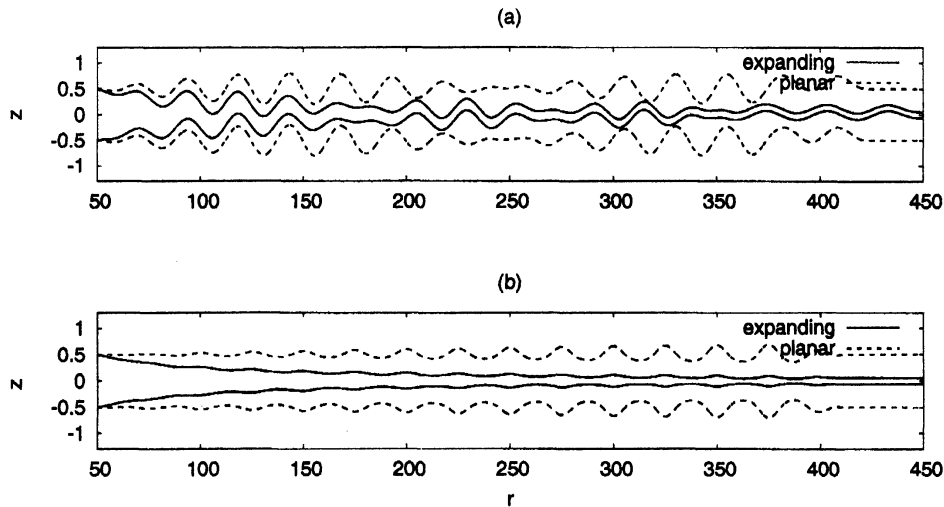


図 3: 円盤形液体シートの形状の時間発展 (小振幅擾乱  $A=0.005$ , 14 周期後), (a): 反対称モード, (b): 対称モード

とし, 反対称モードの計算では  $v$  に与える形で

$$b = b_0, \quad u = U_0, \quad v = A(1 - e^{-t/T_s}) \sin(2\pi/T), \quad z = 0 \quad (20)$$

で与えた。ここで  $b_0, U_0$  は定常流における  $r = r_0$  でのシート厚さとシート流速の値である。 $U_0$  は  $Q$  と  $b_0$  が与えられると (17) で求められる。また,  $A, T$  は擾乱の振幅と周期,  $(1 - e^{-t/T_s})$  の項は  $t=0$  での波の立ち上がりを滑らかにするための緩和因子で  $T_s = T/4$  としている。以下の計算では Weber 数として  $We = 500$ , 擾乱の周期は  $T = 25$ , 擾乱を与える点は  $r_0 = 50$ , 計算範囲は  $r = 450$  までとし, 擾乱が大振幅の場合として  $A = 0.05$ , 小振幅の場合として  $A = 0.005$  の場合を計算した。

図 3 は小振幅の擾乱を加えた場合のシートの 14 周期後の形状を, 擾乱が反対称モード (a) と対称モード (b) について示したものである。2 次元平面シートの場合と比較する為に基本流の厚さが, 円盤形放射状シートの噴出口での厚さ  $b_0$  と同じである 2 次元平面シートの時間発展を同じパラメータで計算したものを同じ図に示している。

図 2(a) より, 小振幅の反対称モードの擾乱が加えられた時は, シート上の擾乱の伝播の様子は 2 次元平面シートの場合よりも下流で振幅が抑制される傾向にあることがわかる。図 2(b) より, 小振幅の対称モードの擾乱の場合にも下流で振幅の抑制傾向がみえている。ところで 2 次元平面シートの場合の線形解析から得られる分散関係式は反対称モードの擾乱については

$$(\omega - k)^2 - \frac{2}{We} k^2 = 0 \quad (21)$$

対称モードの擾乱については

$$(\omega^2 - k^2) - \frac{1}{2We} k^4 = 0 \quad (22)$$

となることが計算できる [4]。これを  $\omega$  を実数として解くことで生じる擾乱の波数を知ることが出

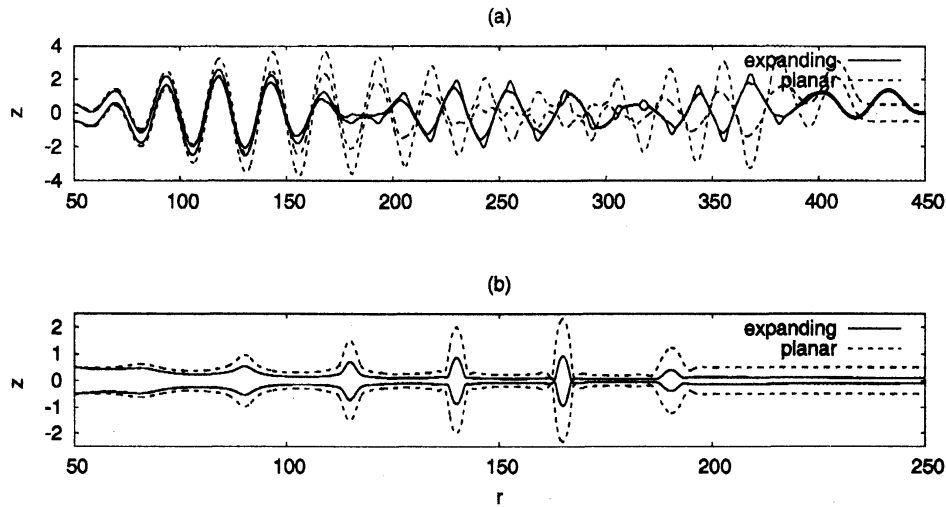


図 4: 円盤形液体シートの形状の時間発展 (大振幅擾乱  $A=0.05$ , 14 周期後), (a): 反対称モード, (b): 対称モード

来て, 反対称モードの擾乱については

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{1 \pm \sqrt{\frac{2}{We}}} \quad (23)$$

となり中立安定な波数が2つある。対称モードについては  $k$  の4次式であるために  $k$  の解は4つあるが, 群速度を考えると下流に伝播する解はそのうちの2つであることが知られている [4]。したがって  $r=r_0$  での周期的な振動によって2つの波数の波が発生し, 波数の違いによって空間的なうなりを生じる。 $T=25$  に対する波数は  $k=0.2682, 0.2363$  (反対称モード),  $k=0.2533, 0.2493$  (対称モード) となる。図2より, この波数の違う2つの波の存在によるうなりが2次元平面シート, 円盤形放射状シートの双方で見られるが, そのうなりの周期はそれぞれ2次元平面シートと比べて差が生じている。これは円盤形放射状シートの場合には分散関係が変化するシート厚さに依存する形になるためだと考えられる。すなわち円盤形放射状シートの場合には厚さが半径に反比例して減少していくが, ある半径で局所的には厚さが一様だと考えると, その半径での分散関係はその半径での厚さで定義された局所 Weber 数  $We' = \frac{\rho b u}{\sigma}$  を2次元平面シートでの分散関係にもちいたもので与えられると近似されるが

$$We' = \frac{\rho b u}{\sigma} = We \frac{b}{b_0} = We \frac{Q}{b_0 r} \quad (24)$$

となることから, 局所 Weber 数  $We'$  は噴出口での Weber 数から半径に反比例して減少し, 分散関係は含まれる  $We'$  によって半径によって変化し, これが2次元平面シートとの違いを与えていると考えられる。

図4は大振幅の擾乱を加えた場合である。大振幅の擾乱が加えられた時は, 円盤形放射状シートの下流での振幅は小振幅の場合と同じように2次元平面シートの場合よりは, 抑制されている。また2次元平面シートで見られるようなシートの厚さが0になるシート破断が円盤形放射状シートでも起こっている。これは小振幅の擾乱の場合には起こらなかったもので非線形効果によるものである。

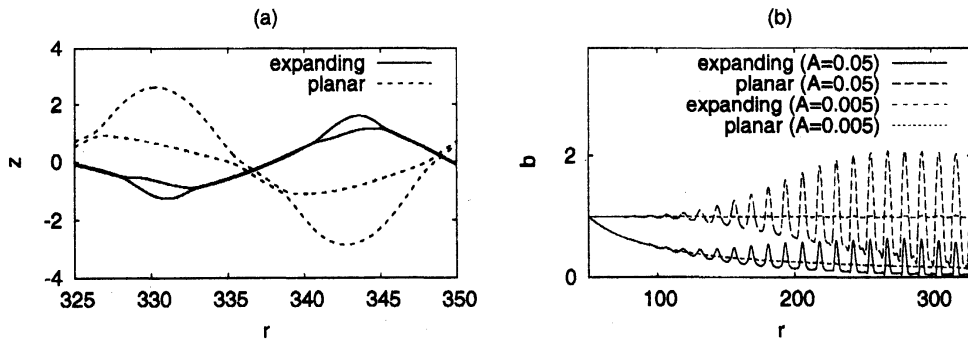


図 5: 大振幅な反対称モードの擾乱の場合における非線形効果 (a): 14 周期後の  $r = 340$  付近でのシート形状, (b): 14 周期後の厚さ  $b$  の比較

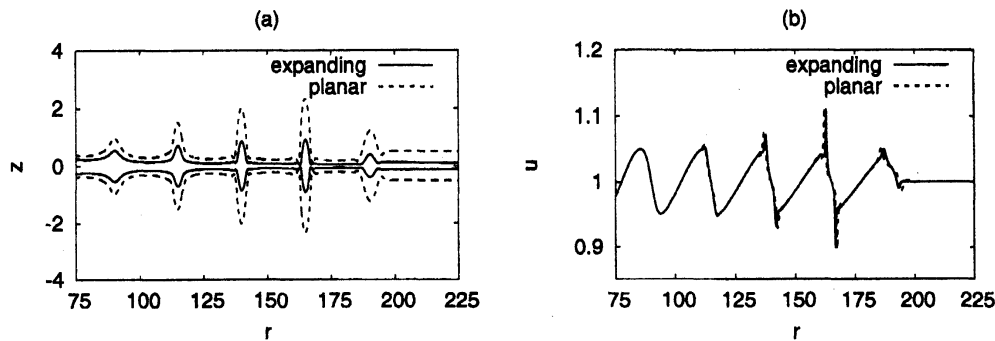


図 6: 大振幅な対称モードの擾乱の場合の非線形効果 (a):  $r = 175$  付近の様子でのシート形状, (b):  $r = 175$  付近の様子での動径方向速度成分  $u$

非線形効果の様子を見る為に、図 5(a) に反対称モードの擾乱の場合に  $t = 14T$  の時のシートの形状を拡大したものを示す。2 次元平面シートの場合には流体が瘤状になることで、厚さが 0 に近づく場所が半波長ごとに出来ているが、円盤形放射状シートの場合も同様の現象が起きている。瘤の大きさは 2 次元平面シートの場合よりも小さい。厚さ変動の様子を小振幅擾乱の場合と比較したものが図 5(b) である。小振幅の擾乱の場合 ( $A = 0.005$ ) では厚さの変動がほとんど起こっていないのに対し、大振幅擾乱の場合 ( $A = 0.05$ ) では厚さの変動が生じているのがわかる。

図 6(a) には対称モードの場合の  $u$  の様子をシートの破断が起こった  $t = 4T$ ,  $r = 150$  付近について示した。この場合にはシートは 2 次元平面シート、円盤形放射状シートどちらでも厚さが違わにかかわらずほぼ同じ箇所で厚さが 0 になっている。図 6(b) では、破断が起こっている近傍でのシートの動径方向速度成分  $u$  を示した。2 次元平面シート及び円盤形放射状シートのどちらも非線形性の影響で波の突っ立ち効果が起こってそれが破断につながっていることがわかるが、2 次元平面シートと円盤形放射状シートは定量的に同じように破断するということがみてとれる。

一般に 2 次元平面シートの場合に比べて円盤形放射状シートでは定常流の厚さが減少しシート厚さに対する擾乱振幅の割合は 2 次元平面シートの場合より早く増加することになるが、それがシートの破断を早めるような結果にはなっていないとはいえず、むしろ 2 次元平面シートに比べて厚



さがかなり減少していく場合もシート崩壊については同じような挙動になっている。

## 5 まとめ

薄膜近似によって円盤形放射状シート上の波動の様子を調べた。得られた方程式を数値的に解くことで円盤形放射状シートの挙動を調べた。ここでは限られたパラメータでしか計算していないが、さらに多くのパラメータについて計算を進める必要がある。特に  $We$  が小さくなるにつれて波の伝播速度は変化し、1つの波数に対して伝播速度が0に漸近する。したがって円盤形放射状シートでは下流のある地点で波が滞留することで2次元平面シートとは異なった振舞いをするのが期待される。このような状況を含むような  $We$  とそれに対応する計算領域をとることが重要であると考えられる。また伝播速度が半径によって変化することによって円盤形放射状シートでは反対称モードが Cardioid という非軸対称な波面を作ることが知られている [1]。ここでの計算を非軸対称な系に拡張し Cardioid の形成への非線形効果を調べる事も課題である。また粘性を含む薄膜近似の定式化 [7] を利用して粘性の効果を調べることも課題としてあげられる。

## 参考文献

- [1] Taylor, G.I., "The dynamics of thin sheets of fluid II. Waves on fluid sheet. III. Disintegration of fluid sheets", *Proc.R.Soc.Lond.A*, 253 (1959), pp. 296-321.
- [2] Clanet, C. "Life of a smooth liquid sheet," *J.Fluid Mech*, 462 (2002), pp. 307-340.
- [3] Lin, S.P. and Jiang, W.Y., "Absolute and convective instability of a radially expanding liquid sheet", *Phys.Fluids*, 15 (2003), pp. 1745-1754.
- [4] Kim I. and Sirignano W.A., "Three-dimensional wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets", *J.Fluid Mech*, 410 (2000), pp. 147-183.
- [5] Mehring, C. and Sirignano, W.A., "Nonlinear capillary waves on swirling, axisymmetric free liquid films", *Int.J.Mult.Flow*, 27 (2001), pp. 1707-1734.
- [6] 吉永, 小谷, "薄膜近似による環状液体シートの解析", 数理解析研究所講究録 1209, (2001), pp.28-37.
- [7] Yoshinaga, T. and Yoshida, T., "Nonlinear wave behavior of the sinuous mode on a free liquid sheet with variable surface tension and viscosity", *J.Phys.Soc.Japan*, 72 (2003), pp. 3113-3122.